

Fyzikální praktikum FJFI ČVUT v Praze
Dynamika rotačního pohybu

Číslo úlohy: 11
Jméno: **Vojtěch HORNÝ**
Spolupracoval: Jaroslav Zeman
Datum měření: 2. 11. 2009
Číslo kroužku: pondělí 13:30
Číslo skupiny: 6
Klasifikace:

Zadání

1. V domácí přípravě odvoďte vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti válce a dutého válce. Vyjděte z definice a odvoďte vztahy:

$$I_V = \frac{1}{2}MR^2 \quad (1)$$

$$I_{DV} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \quad (2)$$

2. Změřte momenty setrvačnosti přiložených rotačních objektů experimentálně a porovnejte je s hodnotami z teoretických vzorců. Měření proveďte alespoň pětkrát. Použijte disk, disk + prstenec a pomocí nich stanovte moment setrvačnosti samotného prstence.
3. Změřte moment setrvačnosti disku umístěného na dráze mimo osu rotace a pomocí výsledků z předchozího úkolu ověřte platnost Steinerovy věty.
4. Ověřte zákon zachování momentu hybnosti. Do protokolu přiložte graf závislosti úhlové rychlosti rotace na čase.
5. Změřte rychlost precese gyroskopu jak přímo senzorem, tak i nepřímo z měření rychlosti rotace disku. Měření proveďte alespoň pětkrát. Obě hodnoty porovnejte.

Základní pojmy a vztahy

Základní veličinou popisující rotační pohyb tuhého tělesa je jeho moment setrvačnosti I . V obecném případě se jedná o tenzor, pro účel našeho měření jej lze nahradit skalárem. Význačnou vlastností momentu setrvačnosti je jeho aditivita při zachování osy rotace. Pro účel měření použijeme vztahy (1) a (2) pro výpočet momentu setrvačnosti pro válec a dutý válec. Moment setrvačnosti tělesa, které roztáčí tíhová síla působící na tělísko o hmotnosti m , spojené s tělesem přes kladku o poloměru r tak, že úhlové zrychlení tělesa je ε , se vypočítá:

$$I = mr\left(\frac{g}{\varepsilon} - r\right) \quad (3)$$

Pro těleso, které rotuje kolem osy, která neprochází těžištěm, se pro výpočet I využívá Steinerova věta:

$$I = I_0 + Ma^2, \quad (4)$$

kde I_0 je moment setrvačnosti při rotaci kolem osy procházející těžištěm, a je vzdálenost těžiště od osy rotace a M je hmotnost tělesa.

Moment hybnosti definujeme vztahem:

$$L = I\omega \quad (5)$$

Pokud na soustavu nepůsobí žádný vnější moment síly, pak se L zachovává.

Gyroskop je v našem případě horizontální setrvačnick upevněný na kolmé pohyblivé ose. Zachovává rovinu rotace. Pokud je vyveden z rovnováhy, pozorujeme precesi a nutaci. Precesní rychlost vypočítáme podle vztahu

$$\Omega = \frac{m_p g d}{I \omega}. \quad (6)$$

I je moment setrvačnosti gyroskopu, ω jeho úhlová rychlost, m_p hmotnost přídavného tělíska a d jeho vzdálenost od osy gyroskopu.

Pomůcky

„A“ base rotational adapter PASCO CI-6690, přídavný disk a prsteneček, rotační dráha se dvěma závažími, gyroskop PASCO ME-8960, přídavný disk gyroskopu ME-8961, dva rotační senzory PASCO PS-2120, USB link PASCO 2100, osobní počítač s programem DataStudio, nit, posuvné měřítko, stojan s kladkou, milimetrové měřítko, váhy.

Postup měření

1. **Domácí úkol:** Moment setrvačnosti tuhého tělesa vypočítáme obecně podle vztahu:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$$

kde ρ hustotu tělesa, dm element hmotnosti, dV element objemu. Pro plný válec upravujeme následujícím způsobem:

$$I_V = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^R r^3 dr dz d\varphi = \frac{1}{2} \frac{M}{V} h \pi R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

Pro dutý válec jsou úpravy obdobné:

$$I_{DV} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr dz d\varphi = \frac{1}{2} \frac{M}{V} h \pi (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

2. Nejprve jsme zvažili závaží na elektrických vahách a změřili poloměr rotační kladky posuvným měřítkem. Vyšly hodnoty $(98 \pm 0,5)g$ a $(1,510 \pm 0,005)cm$. Poté jsme zvažili charakteristické veličiny disku a prstence. Poloměr disku byl $(11,150 \pm 0,005)cm$, poloměry prstence činily $(6,350 \pm 0,005)cm$ a $(5,850 \pm 0,005)cm$. Obě tělesa vážila $(1424,0 \pm 0,005)g$. Závaží jsme nechali padat a na počítači jsme odečítali hodnotu úhlového zrychlení. Z naměřených hodnot jsme vypočítali hodnotu momentu setrvačnosti těles.
3. K ověřování Steinerovy věty jsme nejprve potřebovali změřit moment setrvačnosti samotné rotační dráhy. Postupovali jsme analogicky s předchozím úkolem. Poté jsme na dráhu připevnili disk tak, aby vzdálenost těžiště disku od osy rotace byla 20 cm. Opět jsme z naměřených hodnot vypočetli moment setrvačnosti.
4. Při ověřování zákona zachování momentu hybnosti jsme opět nejprve změřili momenty setrvačnosti systému dvou závaží ve dvou polohách stejně, jako ve druhé úloze. Poté jsme dráhu roztočili a pevně drželi provázek tak, aby tělesa zůstala v bližší poloze. Po chvíli jsme provázek pustili a tělesa byla odstředivou silou posunuta do polohy vzdálenější. Po celou dobu jsme měřili úhlovou frekvenci.
5. Nejprve jsme stejným způsobem jako v úloze 2 změřili moment setrvačnosti rotujícího disku a vyvážili gyroskop tak, aby byl v rovnovážné poloze. Poté jsme na ve vzdálenosti 20 cm od osy umístili přídavné tělíska a roztočili disk. Zároveň jsme měřili rotačním senzorem rychlost precese a úhlovou rychlost.

Experimentální data a výsledky měření

Ve všech výpočtech pokládáme tíhové zrychlení rovno $9,8104 \text{ ms}^{-2}$.

Momenty setrvačnosti disku a prstence vypočítané podle vztahů (1) a (2) vyšly $I_d = 8,85 \text{ g} \cdot \text{m}^2$ a $I_{pr} = 5,31 \text{ g} \cdot \text{m}^2$. Tabulky 1 a 2 ukazují experimentální data a vypočítané hodnoty momentů setrvačnosti obou těles. Používali jsme závaží o hmotnosti $(98,0 \pm 0,5) \text{ g}$.

číslo měření	$\epsilon [\text{rad/s}^2]$	$I_d [\text{g m}^2]$
1	1,52	9,53
2	1,49	9,72
3	1,52	9,53
4	1,52	9,53
5	1,51	9,59
		9,58

Tab. 1 – Moment setrvačnosti disku

číslo měření	$\epsilon [\text{rad/s}^2]$	$I_{d+pr} [\text{g m}^2]$	$I_{pr} [\text{g m}^2]$
1	0,953	15,2111	5,63
2	0,972	14,9133	5,33
3	0,961	15,0842	5,50
4	0,957	15,1474	5,57
5	0,968	14,9750	5,40
		15,0662	5,49

Tab. 2 – Moment setrvačnosti prstence

ϵ – úhlové zrychlení

I_d – moment

setrvačnosti disku

I_{d+pr} – moment

setrvačnosti disku a

prstence

I_{pr} – moment

setrvačnosti prstence

$$I_d = (9,58 \mp 0,04) \text{ g} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{pr} = (5,49 \mp 0,07) \text{ g} \cdot \text{m}^2$$

Naměřené hodnoty se liší od vypočítaných přijatelným rozdílem. Naměřené hodnoty jsou vyšší než vypočítané, což by se dalo přičíst vlivu třecí síly, která měření výrazně ovlivnila. Třecí síla totiž zmenšuje úhlové zrychlení. Podle vztahu (3) pak se pak moment setrvačnosti zvýší.

Podle Steinerovy věty vyšel moment setrvačnosti disku ve vzdálenosti 20 cm od osy rotace $I = 65,81 \text{ g} \cdot \text{m}^2$. V tabulce 3 naleznete data z měření momentu setrvačnosti drážky a tabulka 4 ukazuje data z měření momentu setrvačnosti disku ve vzdálenosti 20 cm od osy rotace. Před tímto měřením jsme zvýšili hmotnost závaží na $(185,0 \pm 0,5) \text{ g}$.

číslo měření	$\epsilon [\text{rad/s}^2]$	$I_{dr} [\text{m}^2]$
1	1,090	13,30
2	1,080	13,42
3	1,090	13,30
4	1,080	13,42
5	1,090	13,30
		13,35

Tab. 3 – Měření momentu setrvačnosti rotační dráhy

číslo měření	$\epsilon [\text{rad/s}^2]$	$I_{nam} [\text{g m}^2]$	$I_d [\text{g m}^2]$
1	0,324	84,54	71,20
2	0,322	85,07	71,72
3	0,326	84,02	70,68
4	0,320	85,60	72,25
5	0,326	84,02	70,68
			71,31

Tab. 4 – Měření momentu setrvačnosti disku s těžištěm 20 cm od osy rotace

ϵ – úhlové zrychlení

I_{dr} – moment

setrvačnosti dráhy

I_{nam} – naměřený

moment setrvačnosti

disku a dráhy

I_d – moment

setrvačnosti disku

$$I_d = (71,3 \mp 0,1) \text{ g} \cdot \text{m}^2$$

Je vidět, že při kolem osy vzdálené od těžiště moment setrvačnosti tělesa výrazně vzroste. Naměřená hodnota momentu setrvačnosti válce je opět vyšší, než vypočítaná. Lze to přisoudit síle tření a také odporu vzduchu, které snižují úhlové zrychlení soustavy.

K ověření zákona zachování momentu hybnosti jsme opět museli změřit momenty setrvačnosti soustavy dvou závaží ve dvou polohách. Během experimentu jsme nechali závaží přemístit se působením odstředivé síly z bližší polohy – polohy 1- vzhledem k ose rotace do polohy vzdálenější – polohy 2. Tím došlo ke změně úhlové frekvence, kterou jsme měřili programem DataStudio. Data z tohoto měření a také závislost úhlové rychlosti na čase během měření jsou v tabulkách 5 – 7 a v grafu 1. Poměr L_1/L_2 je velmi blízký jedné, zákon zachování hybnosti byl tedy ověřen.

číslo měření	ε [rad/s ²]	I_1 [m ²]	číslo měření	ε [rad/s ²]	I_2 [gm ²]
1	0,760	19,08	1	0,485	29,91
2	0,762	19,03	2	0,466	31,13
3	0,747	19,41	3	0,479	30,29
4	0,759	19,10	4	0,485	29,91
5	0,754	19,23	5	0,486	29,85
		19,17			30,22

Tab. 5 – Měření momentu setrvačnosti soustavy dvou závaží v bližší poloze vzhledem k ose rotace

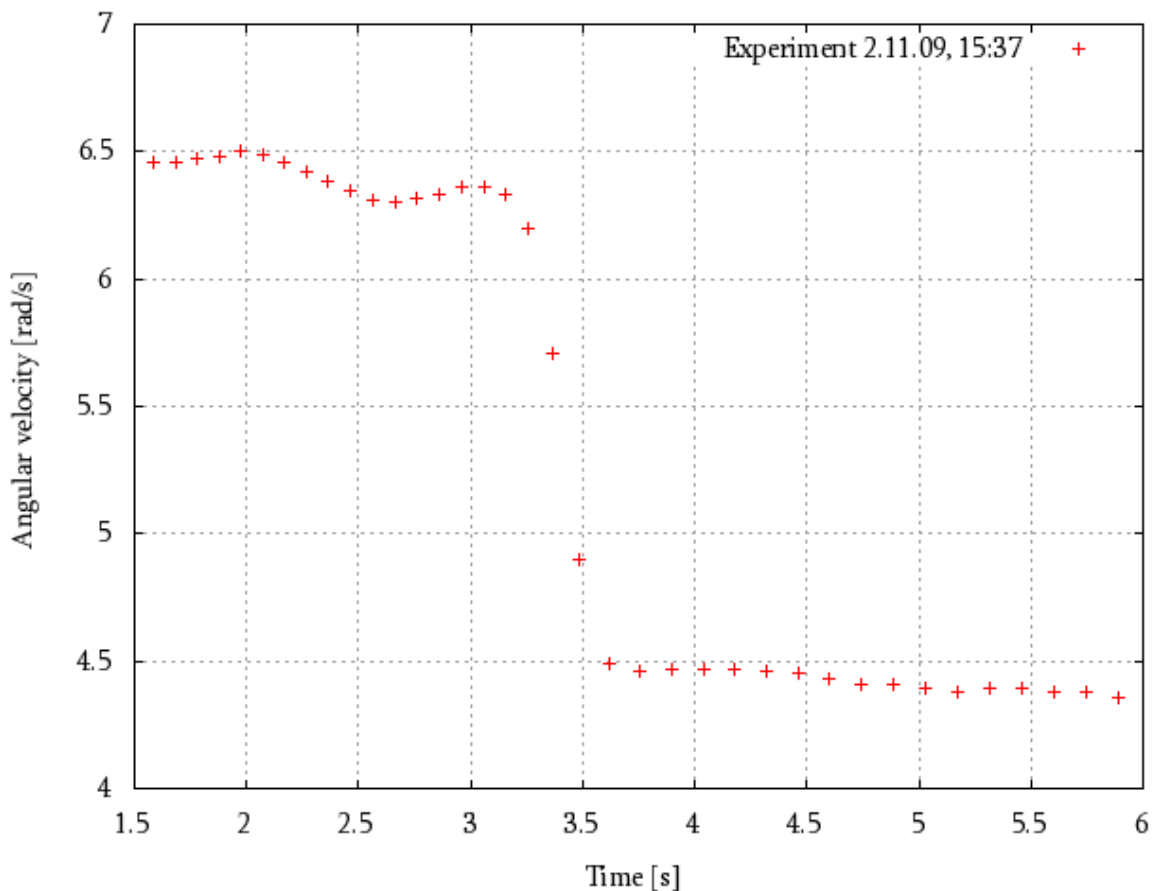
Tab. 6 – Měření momentu setrvačnosti soustavy dvou závaží ve vzdálenější poloze vzhledem k ose rotace

ε – úhlové zrychlení
 I_1 – moment setrvačnosti dvou závaží v poloze 1
 I_2 – moment dvou závaží v poloze 2
 $I_2 = (30,2 \mp 0,2)g \cdot m^2$

číslo měření	ω_1 [s ⁻¹]	ω_2 [s ⁻¹]	L_1 [kgm ² s ⁻¹]	L_2 [kgm ² s ⁻¹]	L_1/L_2
1	5,45	9,33	0,18	0,16	1,09
2	5,77	9,00	0,17	0,17	0,99
3	8,45	13,70	0,26	0,26	1,03
4	4,38	6,61	0,13	0,13	0,96
5	6,19	10,29	0,20	0,19	1,05
6	5,48	9,13	0,18	0,17	1,06

Tab. 7 – k zákonu zachování momentu hybnosti

$\omega_{1,2}$ – úhlová frekvence v poloze 1, 2
 $L_{1,2}$ – moment hybnosti dvou závaží v poloze 1, 2



Graf 1 – k ověření zákona zachování hybnosti. Závislost úhlové rychlosti na čase před a po změně polohy dvou závaží

číslo měření	ϵ [rad/s ²]	I_{2d} [g m ²]
1	0,607	23,89
2	0,620	23,39
3	0,627	23,13
4	0,621	23,36
5	0,597	24,29
		23,61

Pro měření precesní rychlosti jsme opět nejprve změřili moment setrvačnosti rotujícího disku, a to tak, že jsme nechali rotovat dva disky. Moment setrvačnosti disku na gyroskopu I_G je pak roven $I_G = I_{2d} - I_d$. Data jsou v tabulce č. 8.

$$I_G = (14,0 \pm 0,5)g \cdot m^2$$

Tab. 8 – Moment setrvačnosti disku gyroskopu

ϵ – úhlové zrychlení

I_{2d} – moment setrvačnosti dvou disků

V tabulce č 9 jsou uvedena data z měření precesní rychlosti. Při tomto měření vyvážili gyroskop, poté jsme do vzdálenosti 20cm od osy umístili závaží o přídatné závaží o hmotnosti $m_p = (17,880 \pm 0,005)g$ a roztočili disk gyroskopu. Pozorovali jsme precesní pohyb. Rychlost precese jsme vypočítali podle vztahu (6) a také přímo měřili. Naměřená data se velmi podobají vypočítaným hodnotám. Vztah (6) tedy byl potvrzen. Během měření jsme přišli na závadu na senzoru měřícím úhlovou rychlost disku gyroskopu. Byl uvolněný šroub držící kryt senzoru. Tento šroub brzdil kotouč gyroskopu a tím snižoval přesnost měření. Po zjištění závady jsme šroub utáhli a celé měření znovu opakovali.

číslo měření	ω [s ⁻¹]	Ω_v [s ⁻¹]	Ω_n [s ⁻¹]	Ω_v / Ω_n
1	59,64	0,0419	0,0432	0,97
2	44,02	0,0568	0,0560	1,01
3	24,43	0,1023	0,1100	0,93
4	32,09	0,0779	0,0790	0,99
5	27,69	0,0903	0,0940	0,96

ω – úhlová rychlost disku

Ω_v – vypočítaná rychlost precese gyroskopu

Ω_n – naměřená rychlost precese gyroskopu

Tab. 9 – Rychlost precese gyroskopu

Závěr

1. Výpočtem jsem odvodil vztahy (1) a (2).
2. Změřili jsme momenty setrvačnosti disku, disku s prstencem a prstence samotného. Tabulka 10 nabízí srovnání naměřených a experimentálních hodnot. Vypočítané hodnoty jsou vždy o 5 – 9% nižší, přičítám to vlivu třecí síly, která snižuje úhlové zrychlení a tím zvyšuje moment setrvačnosti. Odpovídá to vztahu (3).

Moment setrvačnosti těles		
Těleso	Vypočítaná hodnota	Naměřená hodnota
Disk	$(8,85 \pm 0,02)g \cdot m^2$	$(9,58 \pm 0,04)g \cdot m^2$
Disk + prstenec	$(14,16 \pm 0,04)g \cdot m^2$	$(15,07 \pm 0,06)g \cdot m^2$
Prstenec	$(5,31 \pm 0,02)g \cdot m^2$	$(5,49 \pm 0,06)g \cdot m^2$
Disk 20cm od osy rotace	$(68,81 \pm 0,09)g \cdot m^2$	$(71,3 \pm 0,1)g \cdot m^2$

Tabulka č. 10 – Srovnání vypočtených a naměřených hodnot momentu setrvačnosti

3. Naměřili jsme moment setrvačnosti disku s těžištěm 20 cm od osy rotace. Moment setrvačnosti se výrazně zvýšil. Poměr mezi vypočítanými a naměřenými hodnotami momentu setrvačnosti disku rotujícího kolem osy procházející těžištěm a kolem osy ve

vzdálenosti 20cm od těžiště zůstává asi 0,92. Proto lze tvrdit, že Steinerova věta byla ověřena.

4. Ověřili jsme zákon zachování momentu hybnosti. Data jsou v tabulce č. 7. Poměr mezi momenty hybností v jedné a ve druhé poloze je blízký jedné.
5. Měřili jsme rychlost precese gyroskopu a ověřili vztah (6). Rychlosti precese pro různé úhlové rychlosti disku gyroskopu jsou v tabulce 9.

Použitá literatura

- [1] <http://praktika.fjfi.cvut.cz/> ...úloha 11
- [2] Štoll I. *Mechanika*, 2.vydání. Vydavatelství ČVUT, 2005